

# 基于 workflow 模型的资源配置优化方法

刘胜<sup>1,2</sup>, 范玉顺<sup>3</sup>, 尹朝万<sup>1</sup>

(1. 中国科学院沈阳自动化研究所 辽宁 沈阳 110016; 2. 中国科学院研究生院 北京 100039; 3. 清华大学自动化系, 北京 100084)

**摘要:** workflow 模型在执行过程中所引用的资源数量可以被优化; 当业务实例在 workflow 模型中逗留时间受约束时, 假设每一活动的业务实例逗留时间服从负指数分布, 给出了以资源单位时间消耗成本最小化为目标的求解最优资源数量的方法。分析了业务实例在 workflow 4 种基本结构的逗留时间分布与在每一活动的逗留时间分布的关系, 给出了业务实例在 workflow 模型中总逗留时间与各资源数量的关系, 最后给出了一个基于 workflow 模型的资源优化示例。

**关键词:** workflow; 资源配置优化; 分布函数; 排队问题

**中图分类号:** TP166 TP311.138

## 1 引言

workflow 模型可以由 4 种基本结构构成<sup>[1]</sup>。李建强等讨论了 workflow 系统的资源负载状况<sup>[2]</sup>。KYLE Y. LIN 等<sup>1</sup>人定性讨论了单服务台系统中事务到达、处理和等待时间之间的关系<sup>[3]</sup>。Jin Hyun Son 等人讨论了在排队模型中系统容量有限的情况下, 单服务台和双服务台两种模型在不同策略下、系统服务水平和服务成本之间的关系<sup>[4]</sup>。刘丽文讨论了 1 人双机情况下采用不同策略时系统的产出率及其关系<sup>[5]</sup>。Renaud Leper 等人讨论了存在优先限制情况下弹性完成任务的任务调度的近似算法<sup>[6]</sup>。目前已有许多文献在服务台数量确定且小于 3 的情况下对客户服务中心模型进行了讨论, 但是在多种服务台轮流对客户服务中心, 每种服务台数量可变的模型中讨论每种服务台数量的优化问题目前还未见文献报道, 基于以上模型, 在用 workflow 模型描述的业务过程中, 本文将研究事务的逗留时间与配置资源数量间的优化问题。

本文假设事务到达间隔服从泊松分布, 资源处理事务时间服从负指数分布。优化问题的约束条件为给定比例 (通常 98% 以上) 的事务在 workflow 模型中总逗留时间小于给定值, 目标为单位时间资源消耗成本最低, 优化对象为各个资源的数量。研究的成果可以用来指导服务类行业合理安排各类窗口 (或服务台) 数量, 在顾客到达情况和逗留时间不变的情况下降低员工和设备的使用成本。还可以用来指导以手工生产为主的企业合理安排各类工种的数量, 在单件加工时间不变的情况下, 降低企业的资源消耗成本, 提高订单的处理速度。

为便于讨论, 作如下定义: 逗留时间: 事务从进入特定活动 (或有多个活动组成的结构) 等待资源处理至处理完毕的时间间隔。等待时间: 事务在特定活动 (或结构) 等待资源处理的时间。处理时间: 事务在特定活动 (或结构) 被资源处理的时间。资源利用率: 资源对事务处理时间占该资源对事务处理时间和该资源无事务可处理时间之和的比率。

为了优化各资源数量, 必须得出事务逗留时间与配置资源数量间的关系, 本文将这一关系分解为以下三种关系:

1. 事务在特定活动和在 workflow 模型基本结构逗留时间的关系。
2. 特定活动可调用资源数量与事务在该活动逗留时间的关系。
3. 所有活动调用各类资源数量与单位时间总资源消耗成本关系。

---

**基金项目:** 国家 863/CIMS 主题资助项目 (2003AA412210)。

**作者简介:** 刘胜 (1978-), 男, 安徽合肥人, 中国科学院沈阳自动化研究所博士研究生, 主要从事 workflow 技术研究、企业综合过程建模等。E-mail: [liusheng@sia.cn](mailto:liusheng@sia.cn)。

在讨论上述关系基础上本文在第 5 节给出了基于 workflow 模型的资源配置优化示例。

## 2 事务在特定活动和在 workflow 模型基本结构逗留时间的关系模型

workflow 模型主要包括四种基本结构：串联结构、并联结构、选择结构、循环结构。复杂的 workflow 模型可由这四种基本结构组合而成，为了得出整个 workflow 模型对事务的服务水平，本文分类讨论四种基本结构的等价排队算法。workflow 模型中事务在所有活动的逗留时间、处理时间互不相干，所以是相互独立的，图 1 列出了四种基本结构的模型图。

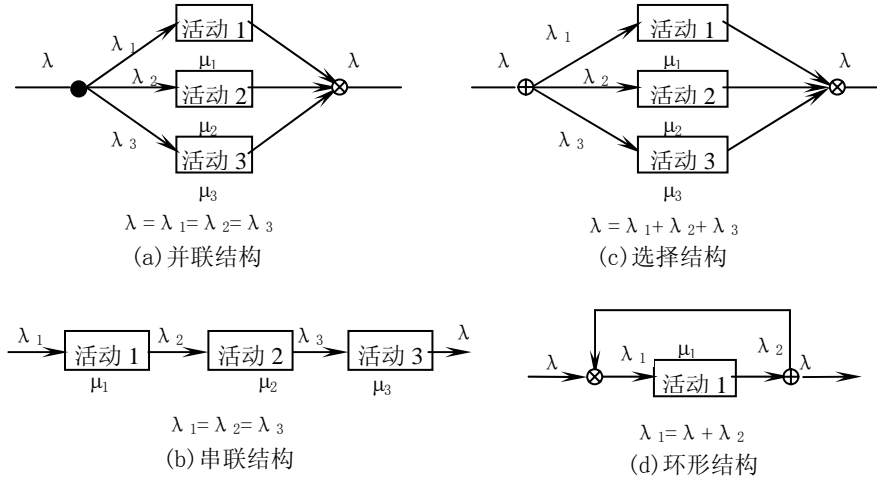


图 1 workflow 模型的四种基本结构

Fig 1 four basic structures of workflow model

在图 1(a)、图 1(b)、图 1(c)中，分别以  $f_{i1}(t)$ 、 $f_{i2}(t)$ 、 $f_{i3}(t)$  表示活动 1、活动 2、活动 3 的事务逗留时间概率密度函数， $T1$ 、 $T2$ 、 $T3$  表示在活动 1、活动 2、活动 3 的事务逗留时间，以  $E(T)$  表示事务在相应结构的平均逗留时间，以  $f^*(t)$  表示相应结构的事务逗留时间概率密度函数。

### 2.1 并联结构

并联结构中事务同时进入各个活动，事务在所有活动执行完毕后，下一个事务才能进入并联结构，模型如图 1(a)所示。事务在并联结构中的逗留时间等于在各支路的逗留时间的最大值，可以得到：

$$E(T) = E(\max(T1, T2, T3))$$

$$= \int_0^{\infty} t * \int_0^t f_{i2}(u) du \int_0^t f_{i3}(v) dv f_{i1}(t) dt + \int_0^{\infty} t * \int_0^t f_{i1}(u) du \int_0^t f_{i3}(v) dv f_{i2}(t) dt$$

$$+ \int_0^{\infty} t * \int_0^t f_{i1}(u) du \int_0^t f_{i2}(v) dv f_{i3}(t) dt \quad (1)$$

$$\int_0^x t * f^*(t) dt = \int_0^x u * \int_0^u f_{i2}(v) dv \int_0^u f_{i3}(w) dw f_{i1}(u) du$$

$$+ \int_0^x u * \int_0^u f_{i1}(v) dv \int_0^u f_{i3}(w) dw f_{i2}(u) du + \int_0^x u * \int_0^u f_{i1}(v) dv \int_0^u f_{i2}(w) dw f_{i3}(u) du$$

所以：

$$f^*(x) = f_{i1}(x) \int_0^x f_{i2}(v) dv \int_0^x f_{i3}(w) dw + f_{i2}(x) \int_0^x f_{i1}(v) dv \int_0^x f_{i3}(w) dw +$$

$$f_{i3}(x) \int_0^x f_{i1}(v) dv \int_0^x f_{i2}(w) dw \quad (2)$$

### 2.2 串联结构

串联结构中事务按时间顺序依次经历各个活动，等价服务台模型如图 1(b)所示。以  $f(u, v, w)$  表示活动 1、活动 2、活动 3 逗留时间联合概率密度函数，由于一个事务在串联

结构中的逗留时间等于在各活动逗留时间之和，可以得到：

$$E(T) = E(T1 + T2 + T3) = E(T1) + E(T2) + E(T3)$$

$$= \int_0^{\infty} t * f_{11}(t) dt + \int_0^{\infty} t * f_{12}(t) dt + \int_0^{\infty} t * f_{13}(t) dt \quad (3)$$

$$\int_0^x t * f^*(t) dt = \iiint_{u+v+w \leq x} (u+v+w) * f(u, v, w) dw dv du$$

$$= \int_0^x \int_0^{x-u} \int_0^{x-u-v} (u+v+w) * f_{13}(w) f_{12}(v) f_{11}(u) dw dv du \quad (4)$$

### 2.3 选择结构

选择结构中事务以不同的概率排它的选择一个活动执行，等价服务台模型如图 1(c)所示。P1、P2、P3 表示事务选择相应活动执行的概率，一个事务在选择结构中的逗留时间等于在各活动逗留时间的概率和，可以得到：

$$E(T) = P1 * E(T1) + P2 * E(T2) + P3 * E(T3)$$

$$= P1 * \int_0^{\infty} t * f_{11}(t) dt + P2 * \int_0^{\infty} t * f_{12}(t) dt + P3 * \int_0^{\infty} t * f_{13}(t) dt \quad (5)$$

$$\int_0^x f^*(t) dt = P1 * \int_0^x f_{11}(t) dt + P2 * \int_0^x f_{12}(t) dt + P3 * \int_0^x f_{13}(t) dt$$

所以：  $f^*(t) = P1 * f_{11}(t) + P2 * f_{12}(t) + P3 * f_{13}(t)$  (6)

### 2.4 环形结构

环形结构中事务在活动执行后以一定概率返回重新执行，等价服务台模型如图 1(d)所示。以  $f_{11}(t)$  表示活动 1 的事务逗留时间概率密度函数，P1、P2 分别表示事务继续执行和折返执行的概率，则可以得到事务折返次数为 n 的概率  $P_n = (P2)^n (P1)$ ，以 N 表示每一事务在活动 1 的平均执行次数，可以得到：

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(P2)^n (P1)) = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(P2)^n (1-P2)) = \frac{1}{1-P2} \quad (7)$$

以  $E(T)$  表示事务在环形结构的平均逗留时间，一个事务在环形结构中的逗留时间等于事务在环形结构中执行所有圈数的逗留时间的概率和，以  $f^*(t)$  表示该选择结构的事务逗留时间概率密度函数，为了简化求解，假设事务在环路中最多绕行 2 圈（实际 workflow 运行中 2 圈以上的几率已经很小），分别以  $f0^*(t)$ 、 $f1^*(t)$ 、 $f2^*(t)$  表示 0 圈、1 圈、2 圈时的逗留时间概率密度函数，可以得到：

$$E(T) = N * \int_0^{\infty} t * f1(t) dt = \frac{1}{1-P2} \int_0^{\infty} t * f1(t) dt \quad (8)$$

$$\int_0^x f^*(t) dt = P1 * \int_0^x f0^*(t) dt + P2 * P1 * \int_0^x f1^*(t) dt + (P2)^2 * P1 * \int_0^x f2^*(t) dt$$

所以：  $f^*(t) = P1 * f0^*(t) + P2 * P1 * f1^*(t) + (1 - P1 - P1 * P2) * f2^*(t)$  (9)

其中：

$$f_{11}(t) = f0^*(t)$$

$$\int_0^x t * f1^*(t) dt = \int_0^x \int_0^{x-u} (u+v) * f_{11}(v) f_{11}(u) dv du$$

$$\int_0^x t * f2^*(t) dt = \int_0^x \int_0^{x-u} \int_0^{x-u-v} (u+v+w) * f_{11}(w) f_{11}(v) f_{11}(u) dw dv du$$

## 3 活动可调用资源数量与事务在该活动逗留时间的关系模型

由于同种资源可能被多个活动调用，因此以资源为服务台的事务排队问题是一个多种客

户流多服务台的排队问题，首先讨论多服务台多种客户流排队问题的算法。

在一个 workflow 模型的活动数目为  $m$ ，调用资源种类为  $n$ ，可以将调用 2 种以上资源的活动分解为多个并行的调用单种资源的活动，构造 workflow 模型的定义矩阵：

$$R_{n \times m} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix} \quad N_{1 \times n} = [n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_n]$$

$$RU_{n \times m} = \begin{bmatrix} r\mu_{11} & r\mu_{12} & \dots & r\mu_{1m} \\ r\mu_{21} & r\mu_{22} & \dots & r\mu_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r\mu_{n1} & r\mu_{n2} & \dots & r\mu_{nm} \end{bmatrix} \quad \Lambda_{1 \times m} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_m]$$

$$R\Lambda_{1 \times n} = [r\lambda_1 \quad r\lambda_2 \quad \dots \quad r\lambda_n]$$

$$U_{1 \times m} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_m]$$

$$\overline{RU}_{1 \times n} = [\overline{ru}_1 \quad \overline{ru}_2 \quad \dots \quad \overline{ru}_n]$$

$r_{ij}$  为 1 (0) 表示资源  $i$  被 (不被) 活动  $j$  调用， $n_i$  表示可用资源  $i$  的数量， $\lambda_j$  表示活动  $j$  的事务到达速率， $r\lambda_i$  表示资源  $i$  的总体事务到达速率， $\mu_j$  表示活动  $j$  的事务处理速率， $r\mu_{ij}$  表示单位资源  $i$  在活动  $j$  对事务的执行速率，为 0 表示不调用， $\overline{ru}_i$  表示单位资源  $i$  对事务的加权平均执行速率。容易得到：

$$R\Lambda_{1 \times n} = \Lambda_{1 \times m} \times (R_{n \times m})' \quad (10)$$

$$U_{1 \times m} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_m] = \left[ \sum_{j=1}^n r\mu_{j1} \quad \sum_{j=1}^n r\mu_{j2} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n r\mu_{jm} \right] \quad (11)$$

令  $A_{1 \times n} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] = \Lambda_{1 \times m} \times (RU_{n \times m})'$ ，则可以得到：

$$\overline{RU}_{1 \times n} = [a_1/r\lambda_1 \quad a_2/r\lambda_2 \quad \dots \quad a_n/r\lambda_n] \quad (12)$$

以资源  $j$  为例，其数量为  $n_j$ ，令  $f_s(t)$  表示事务在不同活动相对于资源  $j$  的平均处理时间概率密度函数，令  $f_w(t)$  表示事务在不同活动相对于同种资源的平均等待时间分布密度函数，令  $f_i(t)$  表示事务在活动  $i$  (该活动调用资源  $j$ ) 的逗留时间概率密度函数，令  $f_{si}(t)$  表示事务在活动  $i$  的处理时间概率密度函数，以  $P_{jb}$  表示资源  $j$  的利用率，令  $f_{wi}(t)$  表示事务在活动  $i$  的等待时间概率密度函数，显然  $f_w(t) = f_{wi}(t)$ ， $f_s(t)$ 、 $f_{si}(t)$  可由前述矩阵参数运算得到，需要求解对象为  $f_i(t)$ 。求解如下：

由于事务在特定活动相对于特定的资源的到达时间间隔和执行时间近似服务指数分布，设一个事务到达时，资源  $j$  服务系统中已有  $n$  个事务，当  $n < n_j$ ，事务不需要等待，当  $n \geq n_j$ ，事务选择最短的队列进行等待，最短队列长度  $l_{\min} = \text{Round}(n/n_j)$ ，以  $P_n$  表示资源  $j$  服务系统中有  $n$  个事务的概率，以  $P_{\min(l)}$  表示资源  $j$  最短队长为  $l_{\min}$  的概率 (该值可以查表得到)，以  $f_l(t | l_{\min} + 1)$  表示资源  $j$  服务系统最小队长为  $l_{\min} + 1$  的服务台前末尾事务的逗留时间概率密度函数，末尾事务在该服务台前逗留时间服从  $l_{\min} + 1$  阶爱尔朗分布，可以得到：

$$f_s(t) = \overline{ru}_j e^{-\overline{ru}_j t} \quad (13)$$

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{n_j} (r\lambda_j / \overline{ru}_j)^n / n! + (r\lambda_j)^{n_j+1} / [n_j! * (\overline{ru}_j)^{n_j} (n_j * \overline{ru}_j - r\lambda_j)] \right]^{-1} \quad (14)$$

$$P_n = \begin{cases} P_0/n! * (r \lambda_j / \bar{r} u_j)^n & (n \leq n_j) \\ P_0/(n_j! * n_j^{n-n_j}) * (r \lambda_j / \bar{r} u_j)^n & (n > n_j) \end{cases} \quad P_{\min(l)} = \sum_{n=n_j^*l}^{n_j^*l+n_j-1} P_n$$

$$P_{jb} = 1 - P_0 - \sum_{n=1}^{n_j-1} P_n C_{n_j-1}^n / C_{n_j}^n = 1 - P_0 - \sum_{n=1}^{n_j-1} P_0 (r \lambda_j / \bar{r} u_j)^n C_{n_j-1}^n / (n! * C_{n_j}^n) \quad (15)$$

事务等待时间概率分布密度  $f_w(t)$  如下:

$$f_w(t) = \sum_{l_{\min}=0}^{\infty} P_{\min(l)} f_l(t | l_{\min}) = \sum_{l_{\min}=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{n=n_j^*l_{\min}}^{n_j^*l_{\min}+n_j-1} P_n \right) * \frac{\bar{r} u_j (\bar{r} u_j t)^{(l_{\min}-1)} e^{-\bar{r} u_j t}}{(l_{\min}-1)!} \right)$$

$$= \sum_{l_{\min}=1}^{\infty} \left( \frac{P_0 \left( (\bar{r} u_j * n_j)^{n_j} - (r \lambda_j)^{n_j} \right)}{(n_j-1)! * (\bar{r} u_j)^{n_j-2} (\bar{r} u_j * n_j - r \lambda_j)} * \left( \frac{r \lambda_j}{\bar{r} u_j * n_j} \right)^{n_j} * \frac{(B_j \bar{r} u_j t)^{l_{\min}-1}}{(l_{\min}-1)!} * e^{-\bar{r} u_j t} \right)$$

令  $A_j = \frac{P_0 \left( (\bar{r} u_j * n_j)^{n_j} - (r \lambda_j)^{n_j} \right)}{(n_j-1)! * (\bar{r} u_j)^{n_j-2} (\bar{r} u_j * n_j - r \lambda_j)}$ ; 令  $B_j = \left( \frac{r \lambda_j}{\bar{r} u_j * n_j} \right)^{n_j}$ , 可得:

$$f_w(t) = \sum_{l_{\min}=1}^{\infty} \left( A_j * B_j * e^{-\bar{r} u_j t} * (B_j \bar{r} u_j t)^{l_{\min}-1} / (l_{\min}-1)! \right) = A_j B_j e^{(B_j-1)\bar{r} u_j t} \quad (16)$$

$$\int_0^x f_{li}(t) dt = \int_0^x f_{wi}(t) \int_0^{x-t} f_{si}(w) dw dt + P_{\min(0)} \int_0^x f_{si}(t) dt$$

$$= \int_0^x f_w(t) \int_0^{x-t} r \mu_{ij} e^{-r \mu_{ij} w} dw dt + \sum_{n=0}^{n_j-1} P_n * \int_0^x r \mu_{ij} e^{-r \mu_{ij} t} dt$$

$$= \int_0^x f_w(t) (1 - e^{-r \mu_{ij}(x-t)}) dt + \sum_{n=0}^{n_j-1} P_n * \int_0^x r \mu_{ij} e^{-r \mu_{ij} t} dt$$

上式两边对  $x$  求导后变换得:

$$f_{li}(x) = r \mu_{ij} e^{-r \mu_{ij} x} \int_0^x f_w(t) e^{r \mu_{ij} t} dt + \sum_{n=0}^{n_j-1} P_n * r \mu_{ij} e^{-r \mu_{ij} t}$$

$$= r \mu_{ij} e^{-r \mu_{ij} x} \int_0^x A_j B_j e^{(B_j-1)\bar{r} u_j t} e^{r \mu_{ij} t} dt + \sum_{n=0}^{n_j-1} P_n * r \mu_{ij} e^{-r \mu_{ij} t}$$

$$= \frac{A_j B_j r \mu_{ij}}{(B_j-1)\bar{r} u_j + r \mu_{ij}} \left( e^{(B_j-1)\bar{r} u_j x} - e^{-r \mu_{ij} x} \right) + \sum_{n=0}^{n_j-1} P_n * r \mu_{ij} e^{-r \mu_{ij} t} \quad (17)$$

#### 4 各类资源使用情况与单位时间总资源消耗成本关系模型

本文将资源的成本分解为包括资源的固有成本和资源的单位时间成本, 以  $C_j$  表示单位数量资源  $j$  在单位时间的平均运行成本, 以  $P_{jb}$  表示资源  $j$  的利用率, 以  $C_{jd}$  表示单位数量资源  $j$  的固有成本, 以  $C_{jf}$  表示单位数量资源  $j$  的闲置单位时间成本, 以  $C_{jb}$  表示单位数量资源  $j$  的繁忙单位时间成本, 以  $T_j$  表示资源  $j$  的使用周期, 以  $V_j$  表示资源  $j$  的残余价值, 相对于可用资源  $j$  的数量  $n_j$ , 以  $n_j'$  表示资源  $j$  的总量, 以  $G_j$  表示资源  $j$  的完好率, 可以得到:

$$G_j = n_j / n_j'; \quad T_j C_j = C_{jd} + T_j ((1 - P_{jb}) C_{jf} + P_{jb} C_{jb}) - V_j;$$

所以:

$$C_j = (C_{jd} + T_j ((1 - P_{jb}) C_{jf} + P_{jb} C_{jb}) - V_j) / T_j = (C_{jd} - V_j) / T_j + C_{jf} + P_{jb} (C_{jb} - C_{jf})$$

令  $S_j = (C_{jd} - V_j)/T_j + C_{jf}$ , 令  $T_j = C_{jb} - C_{jf}$ , 得到:  $C_j = S_j + T_j * P_{jb}$

构造以下三个矩阵:

$$S_{1 \times n} = [S_1 \ S_2 \ \dots \ S_n] \quad T_{1 \times n} = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n] \quad G_{1 \times n} = [G_1 \ G_2 \ \dots \ G_n]$$

本文资源配置优化的目标即在工作流系统事务到达速率为  $\lambda$  的情况下, 事务在工作流系统平均总逗留时间不大于  $T_{total}$  的前提下, 求解矩阵  $N_{1 \times n} = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_n]$ , 使得工作流单位时间成本最小化:

$$\min(C) = \min\left(\sum_{j=1}^n C_j n_j\right) = \min\left(\sum_{j=1}^n \frac{C_j n_j}{G_j}\right) = \min\left(\sum_{j=1}^n \frac{(S_j + T_j * P_{jb}) * n_j}{G_j}\right) \quad (18)$$

## 5 基于 workflow 模型的资源优化示例

某玩具制作厂的一类玩具加工流程, 具有 7 个工序步骤, 使用包括 3 种雇员和 2 类机器在内的 5 种资源, 由此得出抽象化了的工作流模型, 步骤间时序关系如图 2 所示。为了追求客户满意度, 98% 的玩具加工时间不能大于 1 天, 步骤活动资源调用关系如表 1 所示, 通过对制作厂使用的各种资源数量的优化, 使得制作厂每天资源消耗成本最低。

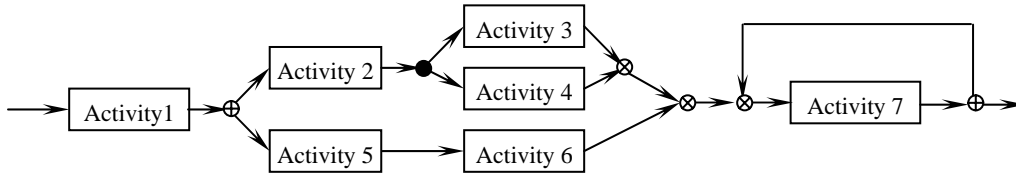


图 2 抽象 workflow 模型示例

Fig. 2 a example of abstract workflow model

表 1: 活动资源调用关系

Table 1 the reference relation of activities and resources

Reference	Activity1	Activity2	Activity3	Activity4	Activity5	Activity6	Activity7
	Resource1	Resource2	Resource3	Resource4	Resource1	Resource2	Resource5

其中,  $\Lambda_{1 \times 7} = [20 \ 12 \ 12 \ 12 \ 8 \ 8 \ 24]$

$R_{5 \times 7}$  中,  $r_{11} = r_{22} = r_{33} = r_{44} = r_{15} = r_{26} = r_{57} = 1$ ; 其余为 0。

$RU_{5 \times 7}$  中,  $r\mu_{11} = 30$ ;  $r\mu_{22} = 18$ ;  $r\mu_{33} = 15$ ;

$r\mu_{44} = 15$ ;  $r\mu_{15} = 16$ ;  $r\mu_{26} = 16$ ;  $r\mu_{57} = 32$ ; 其余为 0,

$$S_{1 \times 5} = [6 \ 10 \ 8 \ 6 \ 12] \quad T_{1 \times 5} = [36 \ 50 \ 80 \ 76 \ 96]$$

$G_{1 \times 5} = [0.9 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.9]$ , 至少 98% 的逗留时间在 1 单位时间以下

根据公式(10)、(11)、(12), 可得:

$$R \Lambda_{1 \times 5} = [28 \ 20 \ 12 \ 12 \ 24] \quad U_{1 \times 7} = [30 \ 18 \ 15 \ 15 \ 16 \ 16 \ 32]$$

$$\overline{RU}_{1 \times 5} = [26 \ \frac{84}{5} \ 15 \ 15 \ 32]$$

根据公式(18), 目标函数为:

$$\min(C) = \min \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{20}{3} + 40P_{1b} \right) n_1 + (12.5 + 62.5P_{2b}) n_2 + (10 + 100P_{3b}) n_3 \\ & + (7.5 + 95P_{4b}) n_4 + \left( \frac{40}{3} + \frac{320}{3} P_{5b} \right) n_5 \end{aligned} \right] \quad (19)$$

以  $f_i(t)$  表示事务在图 3 所示 workflow 模型中的逗留时间密度分布函数, 以  $f_m(t)$  表示在事务在活动 m 的逗留时间密度分布函数, 以  $f_{112 \dots n}(t)$  表示事务在由活动 1、2、……、n 构成的结构中的逗留时间密度分布函数, 以  $P(1)$  表示事务在由活动 1、2、……、n 构成的结构中的逗留时间小于 1 单位时间的概率, 本示例约束即为  $P(1) \geq 98\%$ , 对应不同的资源数

量,其逗留时间分布函数有较大差别,而且资源数量与事务逗留时间为非线性关系,所以依据图3所示步骤求解最佳资源组合:

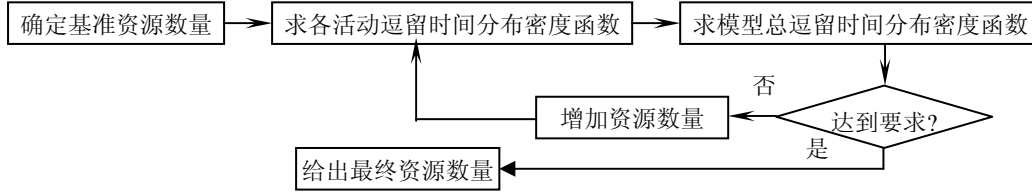


图3 资源配置优化流程

Fig 3 flow of resources configuration optimization

**第一步**,确定各资源基准数量,基准数量为保证事务在以相应资源为服务台的队列长度不会无限增大的资源数量,资源j的基准数量为 $n_{bj} = \text{Round}(r \lambda_j / \bar{r} u_j) + 1$ ,所以可得到:

$$Nb_{1 \times 5} = [n_{b1} \quad n_{b2} \quad n_{b3} \quad n_{b4} \quad n_{b5}] = [2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1]。$$

**第二步**,根据基准资源数量求解 workflow 模型各活动的事务逗留时间分布密度函数,依据公式(13)~(17),可得:

$$P_{1b} = 0.539 \quad P_{2b} = 0.595$$

$$f_{11}(t) = 18.09e^{-18.46t} + 0.6e^{-30t} \quad f_{15}(t) = 55.20e^{-16t} - 45.23e^{-18.46t}$$

$$f_{12}(t) = 12.13e^{-10.85t} - 2.12e^{-18t} \quad f_{16}(t) = 14.98e^{-10.85t} - 6.08e^{-16t}$$

资源3、4、5个数都为1,分别被活动3、4、7调用,因此事务在活动3、4、7逗留时间服从爱尔朗分布,所以:

$$P_{3b} = 0.8 \quad P_{4b} = 0.8 \quad P_{5b} = 0.75$$

$$f_{13}(t) = 3e^{-3t} \quad f_{14}(t) = 3e^{-3t} \quad f_{17}(t) = 8e^{-8t}$$

**第三步**,根据事务在各活动逗留时间概率密度函数求解事务在 workflow 中逗留时间目的函数及逗留时间期望,用Ac表示 Activity,用St表示 Structure,依据公式(1)~(8),可得:

$$\text{Ac3、Ac4 并联, 令 St1=St(Ac3, Ac4): } f_{134}(t) = 6e^{-3t} - 6e^{-6t}$$

$$\text{St1 与 Ac2 串联, 令 St2=St(St1, Ac2):}$$

$$f_{1234}(t) = 8.424e^{-3t} - 13.968e^{-6t} + 5.748e^{-10.85t} - 0.216e^{-18t}$$

$$\text{Ac5、Ac6 串联, 令 St3=St(Ac5, Ac6):}$$

$$f_{156}(t) = 71.53e^{-10.85t} - 48.78e^{-16t} - 22.57e^{-18.46t} - 335.62 * t * e^{-16t}$$

St2 与 St3 构成选择结构,容易得到:选择 St2 的概率  $P1 = \lambda_2 / \lambda_1 = 0.6$ ,选择 St3 的概率  $P2 = \lambda_5 / \lambda_1 = 0.4$ ,令  $\text{St4} = \text{St}(St2, St3)$ :

$$f_{123456}(t) = 5.054e^{-3t} - 8.381e^{-6t} + 32.06e^{-10.85t}$$

$$- 0.130e^{-18t} - 19.51e^{-16t} - 9.028e^{-18.46t} - 134.25 * t * e^{-16t}$$

$$\text{St5=St(Ac7)为环结构:}$$

$$f_{loop}(t) = 6.67e^{-8t} + 8.89t * e^{-8t} + 7.11t^2 * e^{-8t}$$

$$\text{St4、St5 与 Ac1 串联, 令 St0=St(Ac1, St4, St5):}$$

$$f_{11234567}(t) = 191.18e^{-18.46t} + 10.862e^{-3t} + 2.96e^{-18t} + 93.22te^{-18.46t}$$

$$+ 715.69te^{-16t} - 106.08e^{-16t} - 90.64e^{-6t} - 143.41e^{-10.85t}$$

$$+ 0.00076e^{-30t} + 135.13e^{-8t} + 112.47t^2e^{-8t} + 90.65te^{-8t} \quad (20)$$

资源单位时间消耗成本  $C = 422.6$ ,由于  $P(1) = 84.1\% < 98\%$ ,不满足要求,所以需要添加资源数量。

**第四步**,依据以下原则选取添加数量的资源种类:如果添加该种资源数量后总逗留时间

减少值与单位时间总资源消耗成本增加值比率  $\Delta P / \Delta C$  最大, 则使该种资源数量加 1, 公式 21-25 分别是资源 1-5 增加 1 后的逗留时间概率密度函数, 相关数据如表 2 所示。

$$f_{11234567}(t) = -0.16e^{-30t} - 2.64e^{-24.80t} + 39.64e^{-16t} - 74.63e^{-10.85t} + 83.16e^{-8t}t^2 + 106.66e^{-8t} - 79.38e^{-6t} + 10.27e^{-3t} + (86.31e^{-16t} + 84.40e^{-8t} - 4.31e^{24.80t})t + 0.24e^{-18t} \quad (21)$$

$$f_{11234567}(t) = 0.0018e^{-30t} + 292.23e^{-18.46t} + 10.46e^{-8t} + 13.25e^t t + 12.49e^{-8t}t^2 + 63.47e^{-6t} + 9.59e^{-3t} + (68.63e^{-18.46t} + 14850.50e^{-16t} + 72.69e^{-8t})t + 57.19e^{-8t}t^2 \quad (22)$$

$$f_{11234567}(t) = 0.0083e^{-30t} + 384.60e^{-18.46t} - 57.51e^{-18t} - 106.08e^{-16t} - 220.97e^{-15.6t} - 59.88e^{-15t} + 289.73e^{-12.6t} - 282.19e^{-10.85t} + 46.86e^{-8t} + 5.43e^{-3t} + (93.22e^{-18.46t} + 228.27e^{-18t} + 715.69e^{-16t} - 33.72e^{-8t})t + 64.97e^{-8t}t^2 \quad (23)$$

$$f_{11234567}(t) = 0.0083e^{-30t} + 384.60e^{-18.46t} - 57.51e^{-18t} - 106.08e^{-16t} - 220.97e^{-15.6t} - 59.88e^{-15t} + 289.73e^{-12.6t} - 282.19e^{-10.85t} + 46.86e^{-8t} + 5.43e^{-3t} + (93.22e^{-18.46t} + 228.27e^{-18t} + 715.69e^{-16t} - 33.72e^{-8t})t + 64.97e^{-8t}t^2 \quad (24)$$

$$f_{11234567}(t) = 0.66e^{-32t} + 0.78e^{-30t} + 22.91e^{-27.5t} - 1557.48e^{-18.46t} - 24.62e^{-18t} + 1415.47e^{-16t} + 152.35e^{-10.85t} - 17.06e^{-6t} + 6.99e^{-3t} + (0.58e^{-32t} + 63.63e^{-27.5t})t^2 + (1.29e^{-32t} + 77.46e^{-27.5t} - 885.16e^{-18.46t} - 3496.89e^{-16t})t \quad (25)$$

表 2 资源配置  $N_{1 \times 5}$  与事务完成时间  $T_{total}$ 、单位时间资源消耗成本  $C$  对照表

Table 2 the relation of resources configuration, business finished time and resources cost

	$N_{1 \times 5}$	$P_{11234567}(1)$	$\Delta P$	$C$	$\Delta C$	$\Delta P / \Delta C$
资源 1 增 1	[3,2,1,1,1]	85.0%	0.009	429.3	6.7	0.00134
资源 2 增 1	[2,3,1,1,1]	85.7%	0.016	435.1	12.5	0.00128
资源 3 增 1	[2,2,2,1,1]	90.6%	0.065	432.6	10.0	0.00650
资源 4 增 1	[2,2,1,2,1]	90.6%	0.065	430.1	7.5	0.00867
资源 5 增 1	[2,2,1,1,2]	89.1%	0.050	436.0	13.4	0.00373

显然资源 4 增加 1 时,  $\Delta P / \Delta C$  最大, 所以让资源 4 数量增加 1。回到第二步重新计算, 然后进入第三步验证是否达到要求, 如果达到则跳出循环, 否则继续循环, 直到达到要求为止。

**第五步,** 至此得出满足  $P_{11234567}(1) = 98.7\% > 98\%$  且目标函数  $C$  达到最小, 最优资源配置向量为  $N_{1 \times 5} = [2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1]$ , 由公式(19)可得加工时间约束下的最低运作成本  $\min(C) = 440$ 。表明玩具制作厂使用资源 1——资源 5 数量分别为 2、2、2、2、1 时, 满足玩具加工时间要求, 且每天资源消耗成本最低为 440 元。

## 6 结束语

本文研究了事务在用 workflow 模型描述的业务过程中的逗留时间与配置资源数量间的优化问题, 在求解最优配置资源数量过程中, 采用了由基准资源配置开始, 择优增加资源数量以达到最优的方法, 快速得到优化结果, 这种方法还未在别的文献中报道过。研究的成果在指导加工类与装配类企业合理安排各类机器和各类工种的数量、降低机器和人员使用成本、提高订单服务速率方面是可行有效的, 在指导服务类行业合理安排各类服务台和服务员数量、降低设备和人员使用成本、降低顾客的等待时间方面也是可行有效的。

### 参考文献:

- [1] FAN Yushun. Fundamentals of workflow mangement technology[M]. Beijing: TUP, Springer, 2001(in Chinese). [范玉顺. workflow 管理技术基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 施普林格出版社, 2001.]
- [2] Li Jianqiang, Fan Yushun, Zhou Mengchu. Performance Modeling and Analysis of Workflow[J]. IEEE



TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS,2004,34(2) [A]: 229-242

[3] KYLE Y. LIN, SHELDON M. ROSS. Admission Control with Incomplete Information of A Queuing System [J]. Operation Research, 2003,51(4):645-654

[4] Jin Hyun Son, Myoung Ho Kim. Improving the performance of time-constrained workflow processing [J]. The Journal of Systems and Software, 2001,58(1):211-219

[5] Liu Liwen. A Queuing Model of a Production System with One Operator and Two Machines [J]. Journal of Systems Engineering,1995,10(3):20-30 [刘丽文. 一人多机生产系统的排队论模型研究[J]. 系统工程学报,1995,10(3):20-30 ]

[6] Renaud Lepere, Denis Trystram, Gerhard J. Woeginger. Approximation Algorithms for Scheduling Malleable Tasks under Precedence Constraints [J]. International Journal of Foundations of Computer Science,2002,13(4):613-627

### A Workflow—Based Method of Resources Configuration Optimization

LIU Sheng<sup>1,2</sup>, FAN Yu—shun<sup>3</sup>, YIN Chao—wan<sup>1</sup>

(1.Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016,China;  
2.Graduate School of Chinese Academy of Sciences, 100039; 3.Dept. of Automation, Tsinghua Univ., Beijing 100084,China)

**Abstract:** *The number of every kind of resource which is referenced in a workflow model can be optimized. With the constraint of business remaining time in a workflow model, in order to minimize the resources consumption cost, assuming the business remaining time a in every activity is an exponential distribution, a method is put forward to get the quantity of every kind of resources. The relation of the distribution of business remaining time in the 4 basic structures of the workflow model and in the single activity is shown. The relation of the number of every kind of resource and the whole resources consumption cost is analysed.*

**Key words:** workflow; resources configuration; distribution function; optimization

---

Foundation item: Project supported by the National High—Technology Development Program for CIMS,China(2003AA412210)